# Algorithmen & Datenstrukturen

Julian Huber & Matthias Panny

# Weitere Datenstrukturen

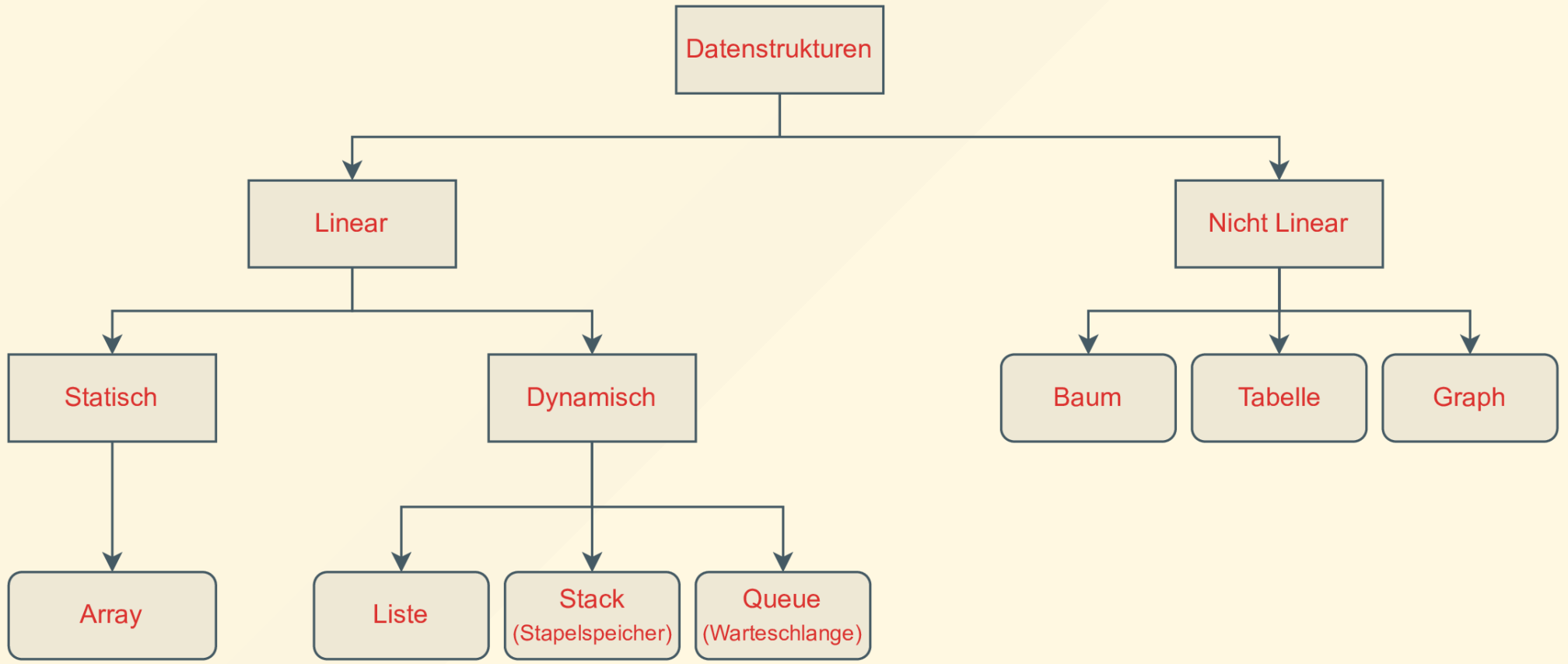
(Bäume und Graphen)

## 🎯 Lernziele

- Studierende kennen die Datenstruktur eines Baumes
- Studierende kennen die Datenstruktur eines Graphen
- Studierende können Bäume & Graphen praktisch anwenden

# Bäume & Graphen

- Alle Datenstrukturen die wir bis jetzt betrachtet haben waren linear bzw. Mischformen wie die Hash-Tabelle

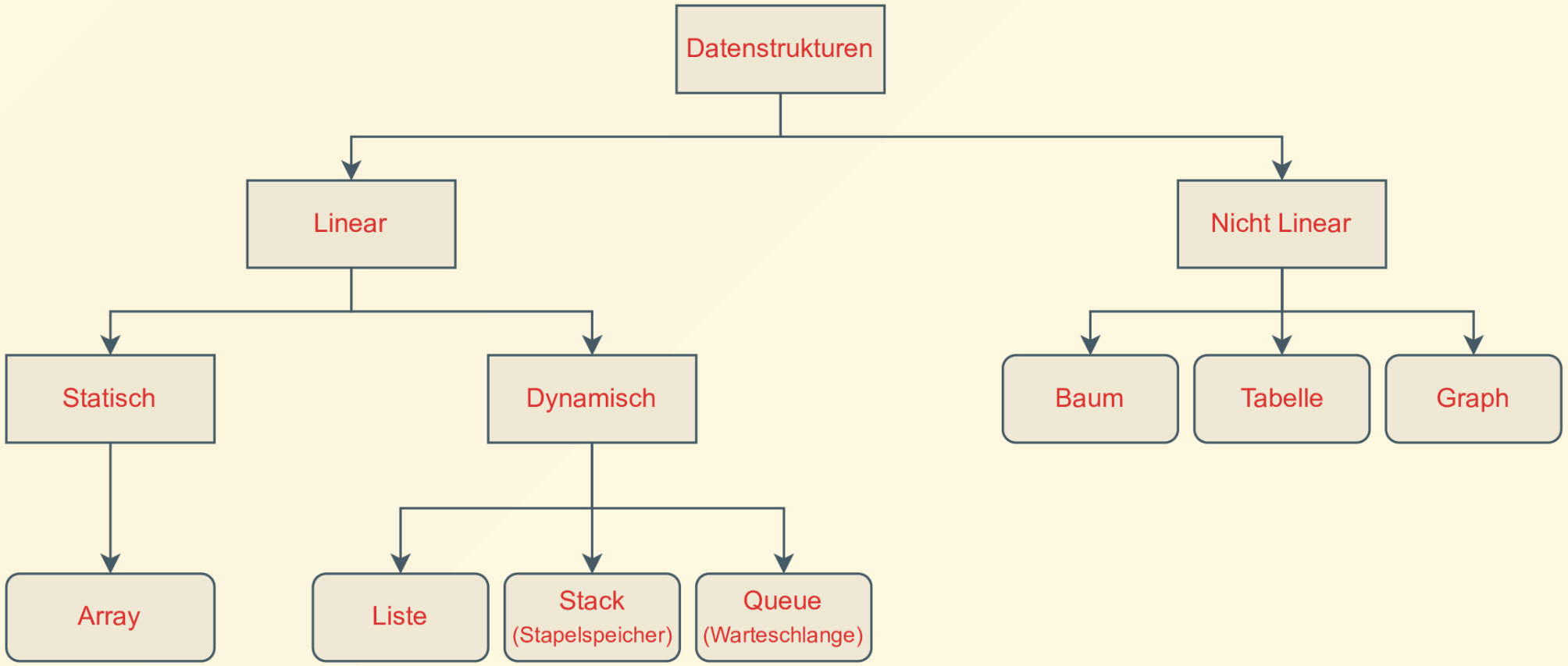



- Viele Daten die wir in der Realität haben lassen sich aber nur schlecht in sequentielle Form packen

# Bäume

# Beispiel - Taxonomie von Datenstrukturen

- Beispielsweise auch diese Taxonomie von Datenstrukturen lässt sich nicht sequentiell abbilden



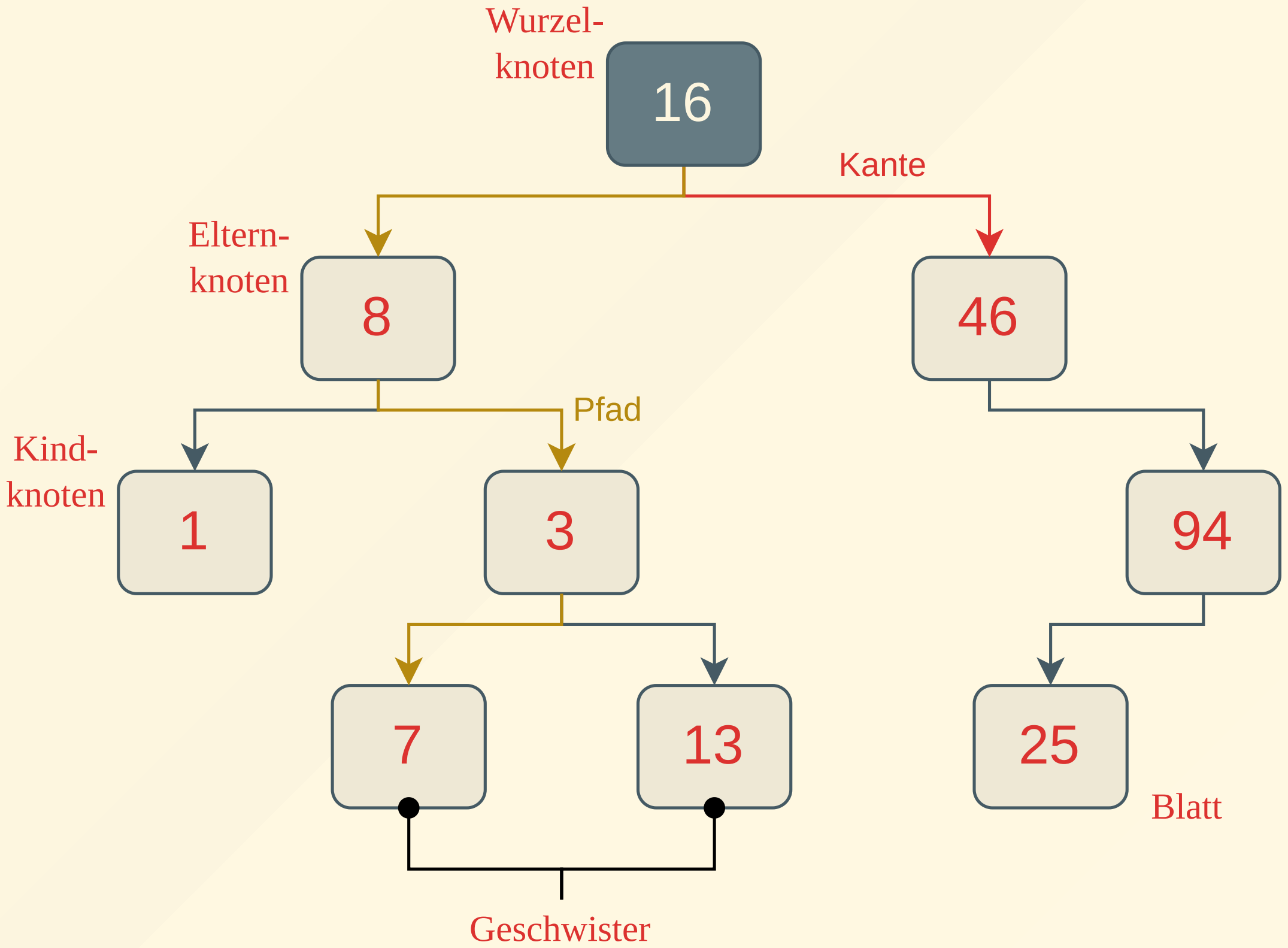
# Bäume

- Bäume sind Datenstrukturen die uns bereits in einigen Beispielen (unbewusst) begegnet sind
- Sie bilden hierarchische Strukturen ab → sinnvoll für kombinatorische Probleme

## Aufbau eines Baumes

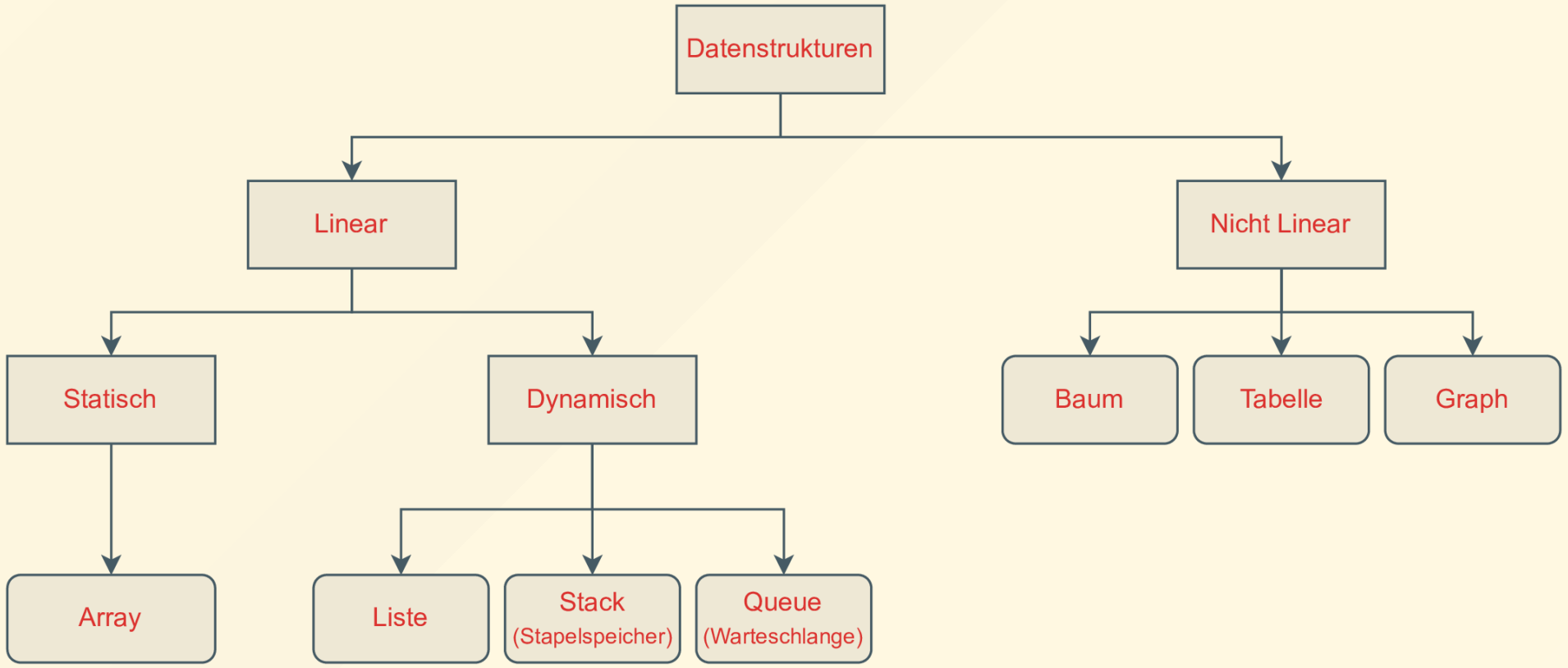
- Knoten die über Kanten miteinander verbunden sind → ähnlich einer Liste
- Es gibt genau eine Verbindung zw. 2 Knoten → einer der Knoten ist der Elternknoten, der andere der Kindknoten
- Es gibt genau einen Knoten ohne Eltern → Wurzel
- Es kann beliebig viele Knoten ohne Kinder geben → Blätter
- Üblicherweise wird die Wurzel ganz oben dargestellt und darunter die Kinder bzw. weitere Nachkommen

# Bäume


Wurzel-
knoten
16
Kante
Eltern-
knoten
8
46
Pfad
Kind-
knoten
1
3
94
7
13
25
Blatt
Geschwister

# Bäume

- Durch Start beim Wurzelknoten kann man sich entlang der Kanten zu jedem beliebigen Knoten "durchhangeln" → ein Pfad
- Jede Abzweigung entspricht z.B. einer Frage oder Entscheidung:
  → *"Ist die Datenstruktur linear oder nicht-linear?"*
  → *"Ist die Datenstruktur statisch oder dynamisch?"*




- Die Antwort liefert den nächsten Schritt
- Der Pfad identifiziert dadurch jeden Knoten genau

# Bäume

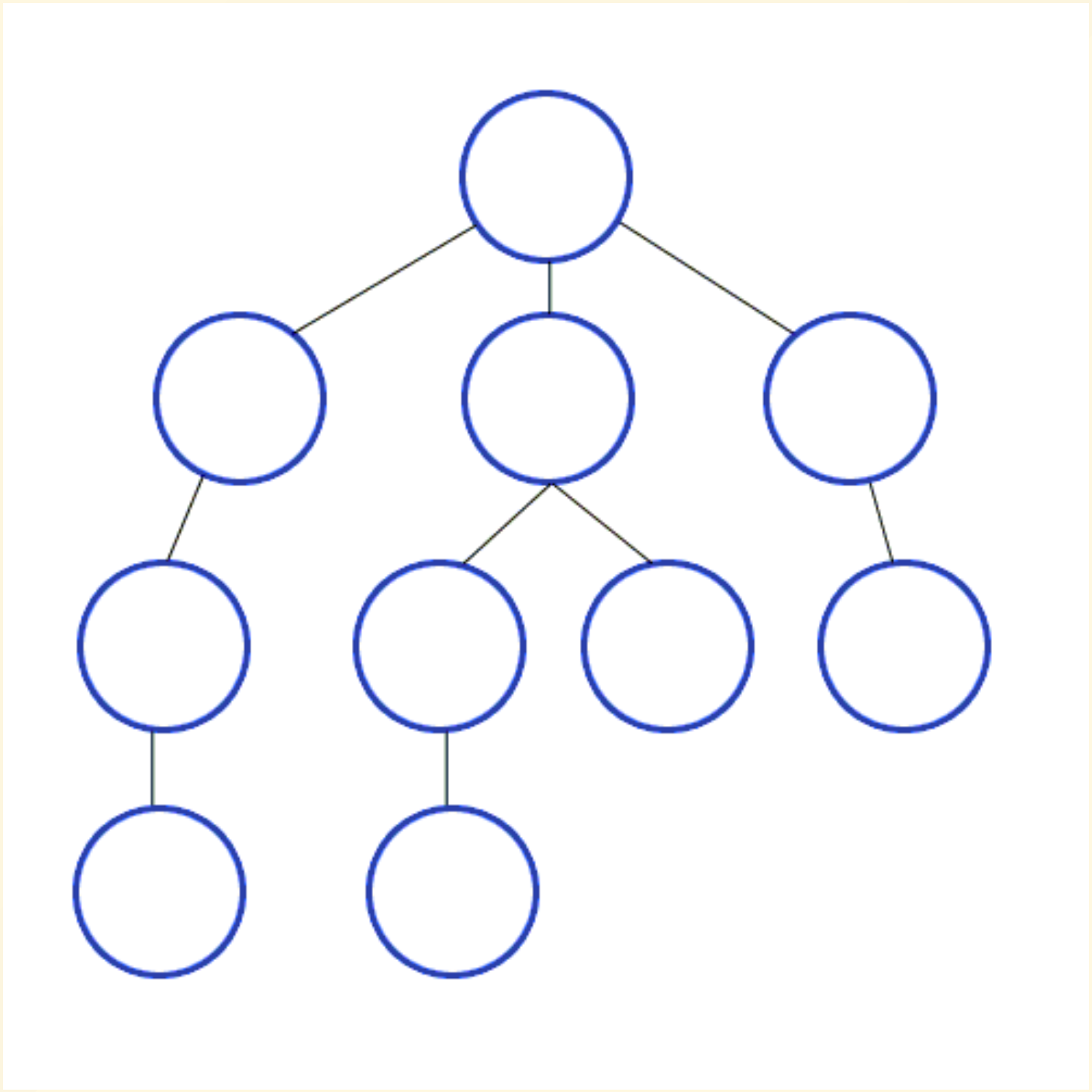
## Arten/Eigenschaften von Bäumen

- Binärbaum:
  - jeder Knoten hat genau zwei Kinder
- Suchbaum:
  - ein Baum bei dem die Elemente im Baum sortiert eingeordnet werden → $\mathcal{O}(\log n)$ wenn der Baum balanciert ist
- Können kombiniert werden → Binärer Suchbaum
- 🤓 Weiters:
  - AVL-Baum, Rot-Schwarz-Baum, etc.
  - MinHeap, MaxHeap als verwandte Datenstrukturen

## Beispiel - `tree_example.ipynb`

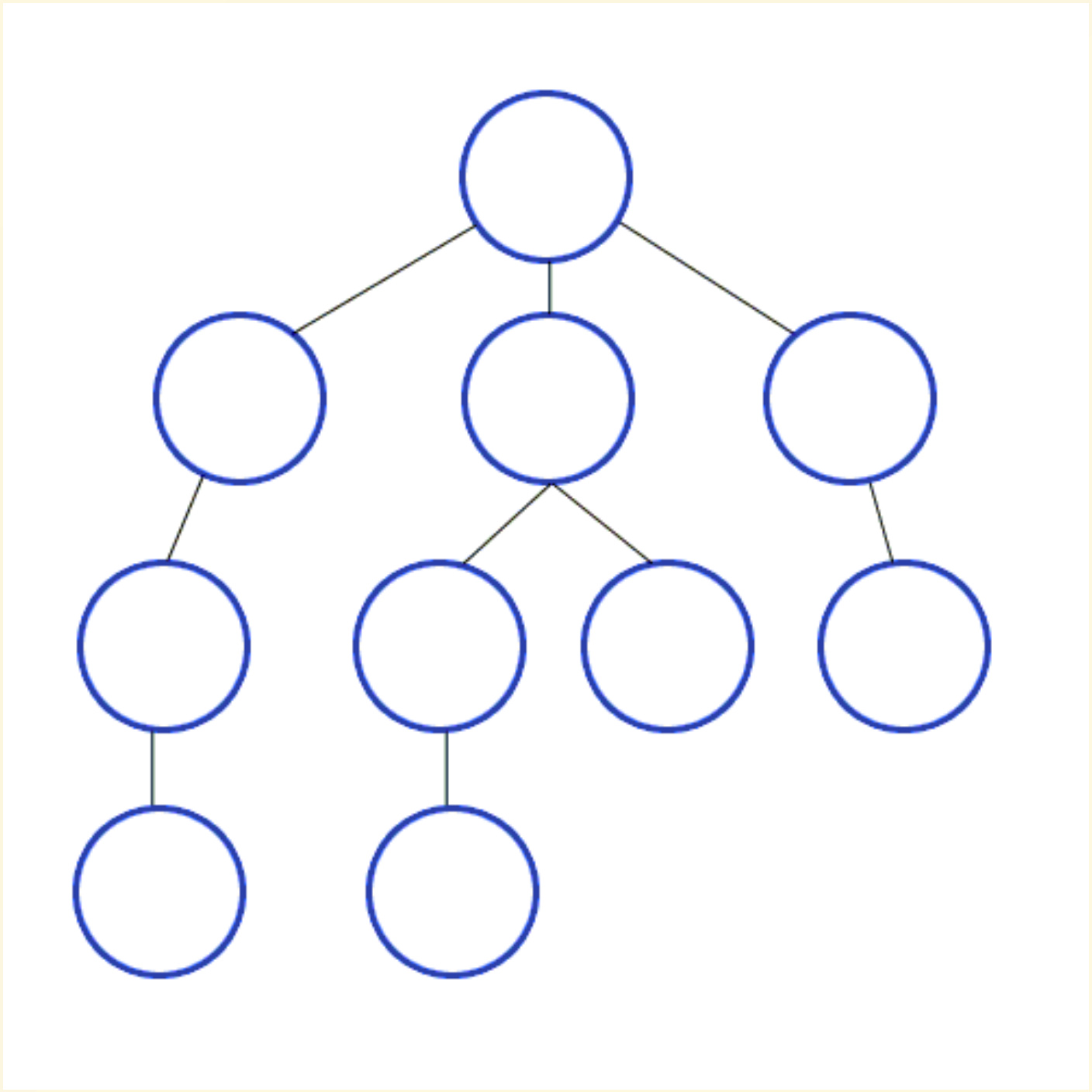
- Erstellen aller notwendigen Klassen
- Traversieren durch den Baum
- Parsen einer HTML-Datei

# Traversieren durch Bäume - Breitensuche



Bildquelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Breadth-First-Search-Algorithm.gif

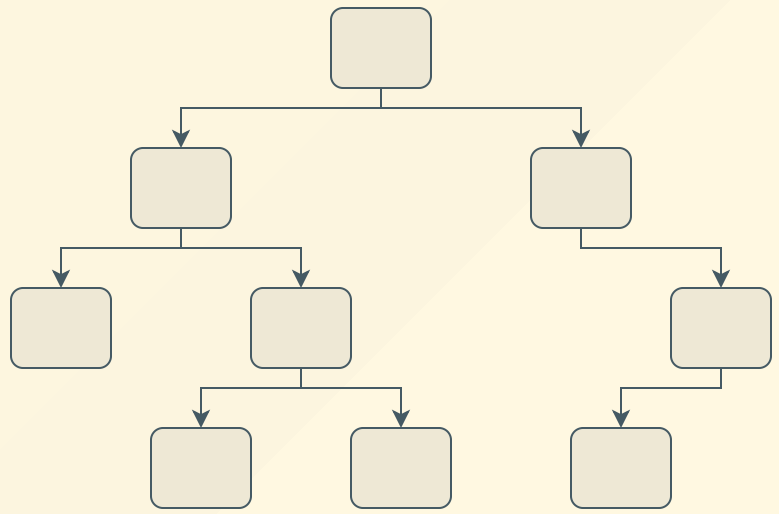
# Traversieren durch Bäume - Tiefensuche



Bildquelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Depth-First-Search.gif

# Binärer Suchbaum

- Wir können einen binären Suchbaum nutzen um Elemente zu sortieren → beim Einfügen wird vorgegangen wie bei einer Binärsuche
- 🤓 Wir können damit auch ein assoziatives Array implementieren



## 🤓 Beispiel - `bs_tree_example.ipynb`

- Erstellen eines binären Suchbaums
- Automatisches sortieren der Elemente
- Implementieren der `__contains__(...)`-Methode um den Baum zu durchsuchen

# ✍️ Aufgabe

- Wir wollen wieder mathematische Ausdrücke lösen, bzw. in eine lösbare Form bringen
  - In einer Hausübung bereits mit dem Dijkstra-Two-Stack-Algorithmus gelöst
  - Nun wollen wir einen Binärbaum nutzen
- Dieses Konzept wird auch in vielen anderen Fällen genutzt
  - Analyse von Texten (z.B. im natural language processing)
  - um Quellcode automatisch zu interpretieren
- Ausgangslage stellt die Datei `parse_tree_start.py` dar

# ✍️ Aufgabe

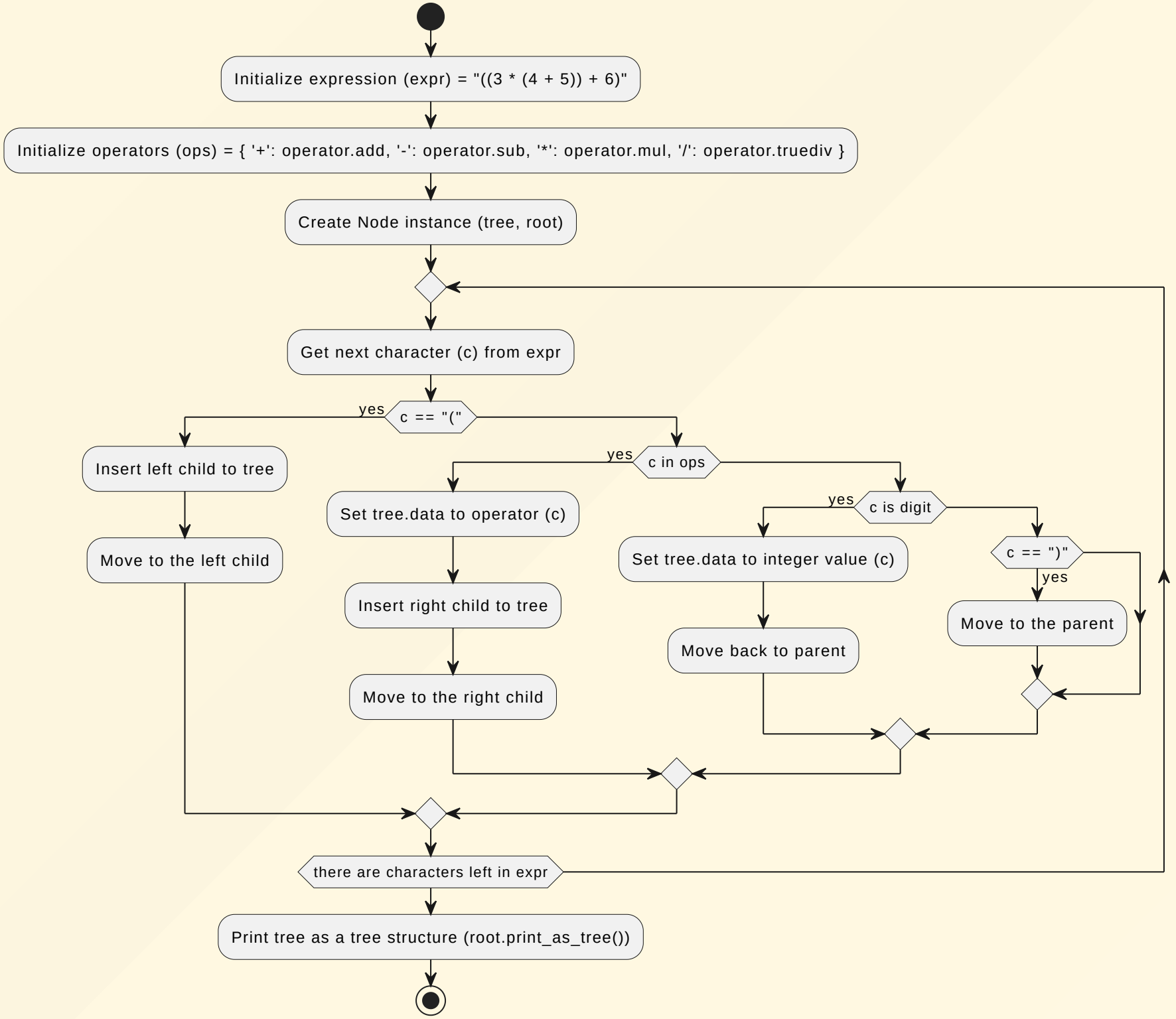
- Es gelten folgende Regeln für das aktuelle Zeichen `c`:

  1 `c == '('`: füge einen neuen Knoten als linkes Kind des aktuellen Knotens ein und gehe zum linken Kind

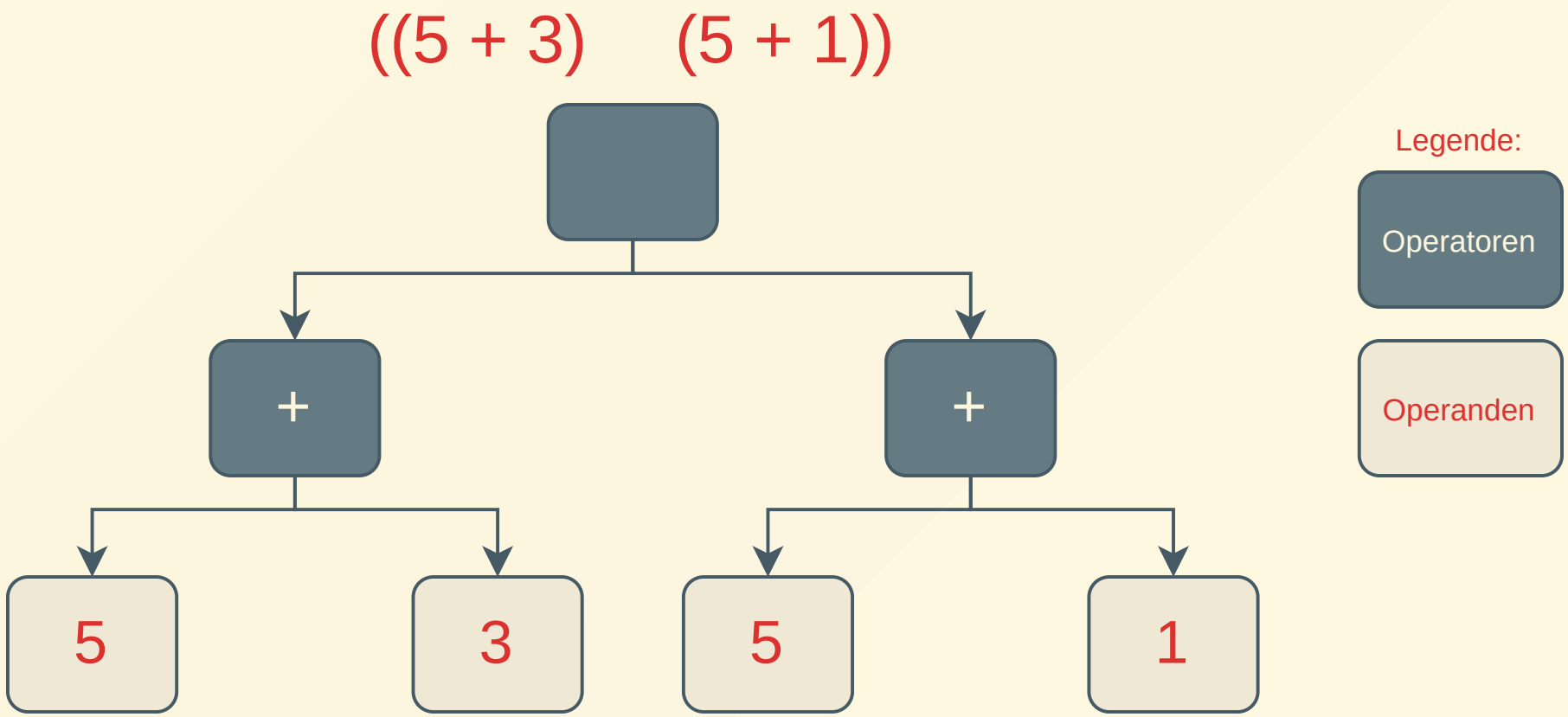
  2 `c` ein Operator (+, -, *, /): setze den Wert des aktuellen Knotens auf den Operator und füge einen neuen Knoten als rechtes Kind des aktuellen Knotens ein und gehe zum rechten Kind

  3 `c` eine Zahl: setze den Wert des aktuellen Knotens auf die Zahl und gehe zum Elternknoten

  4 `c == ')'`: gehe zum Elternknoten


Initialize expression (expr) = "((3 * (4 + 5)) + 6)"
Initialize operators (ops) = { '+': operator.add, '-': operator.sub, '*': operator.mul, '/': operator.truediv }
Create Node instance (tree, root)
Get next character (c) from expr
c == "("
yes
Insert left child to tree
Move to the left child
c in ops
yes
Set tree.data to operator (c)
Insert right child to tree
Move to the right child
c is digit
yes
Set tree.data to integer value (c)
Move back to parent
c == ")"
yes
Move to the parent
there are characters left in expr
Print tree as a tree structure (root.print_as_tree())

# Lösung - Dijkstra-Two-Stack-Algorithmus mit Baum




## Musterlösung - `parse_tree.py`

- Klassendefiniton für Knoten eines Binärbaums, mit `insert_left(...)`, `insert_right(...)` anstelle von Selbstordnung
- Algorithmus um Baum-Objekt aufzubauen
- Funktion um den ursprünglichen Ausdruck wieder aus dem Baum zu rekonstruieren

# Binärer Suchbaum

- Für alle Operationen im Mittel effizient
- Es wird in jedem Fall eine Binärsuche angewendet um das zu behandelnde Element zu finden
- Worst-case Performance tritt ein, wenn der Baum nicht mehr balanciert ist → selbst-balancierende Bäume

| Data Structure | Time Complexity | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Average | | | | Worst | | | |
| | Access | Search | Insertion | Deletion | Access | Search | Insertion | Deletion |
| Array | O(1) | O(n) | O(n) | O(n) | O(1) | O(n) | O(n) | O(n) |
| Stack | O(n) | O(n) | O(1) | O(1) | O(n) | O(n) | O(1) | O(1) |
| Queue | O(n) | O(n) | O(1) | O(1) | O(n) | O(n) | O(1) | O(1) |
| Linked List | O(n) | O(n) | O(1) | O(1) | O(n) | O(n) | O(1) | O(1) |
| Hash Table | N/A | O(1) | O(1) | O(1) | N/A | O(n) | O(n) | O(n) |
| Binary Search Tree | O(log n) | O(log n) | O(log n) | O(log n) | O(n) | O(n) | O(n) | O(n) |

Bildquelle: [Althoff 2021]

# AVL-Bäume (nach Georgi Maximowitsch Adelson-Welski und Jewgeni Michailowitsch Landis)

- Sind eine gängige Variante von selbst-balancierenden Bäumen → Performance degradiert nicht mehr
- Es wird ein Balancefaktor eingeführt der den Höhenunterschied der beiden Sub-Bäume eines Knoten darstellt
- Knoten können so eingefügt werden, dass der Baum balanciert bleibt
- Sollte eine Höhenkorrektur notwendig sein kann dies durch eine sogenannte Rotation erreicht werden

# Heaps

- Datenstruktur in der ein Paar an Daten gespeichert wird
  - Wert (Daten)
  - Priorität (z.B. Position im Baum beim horizontalen Traversieren)
- Wird üblicherweise mit einem Baum implementiert → Art des Heap hängt vom verwendeten Baum ab
- Gängige Arten an binären Heaps:
  - Max-Heap: Elternknoten hat immer höhere Priorität als Kinder
  - Min-Heap: Elternknoten hat immer niedrigere (oder gleiche) Priorität als Kinder

## Anwendung - Vorrangwarteschlange

- Wenn ein neues Element eingefügt wird, wird es nach Priorität gereiht
- Implementierung mit Heap erlaubt Operationen in $\mathcal{O}(\log n)$

# Heaps

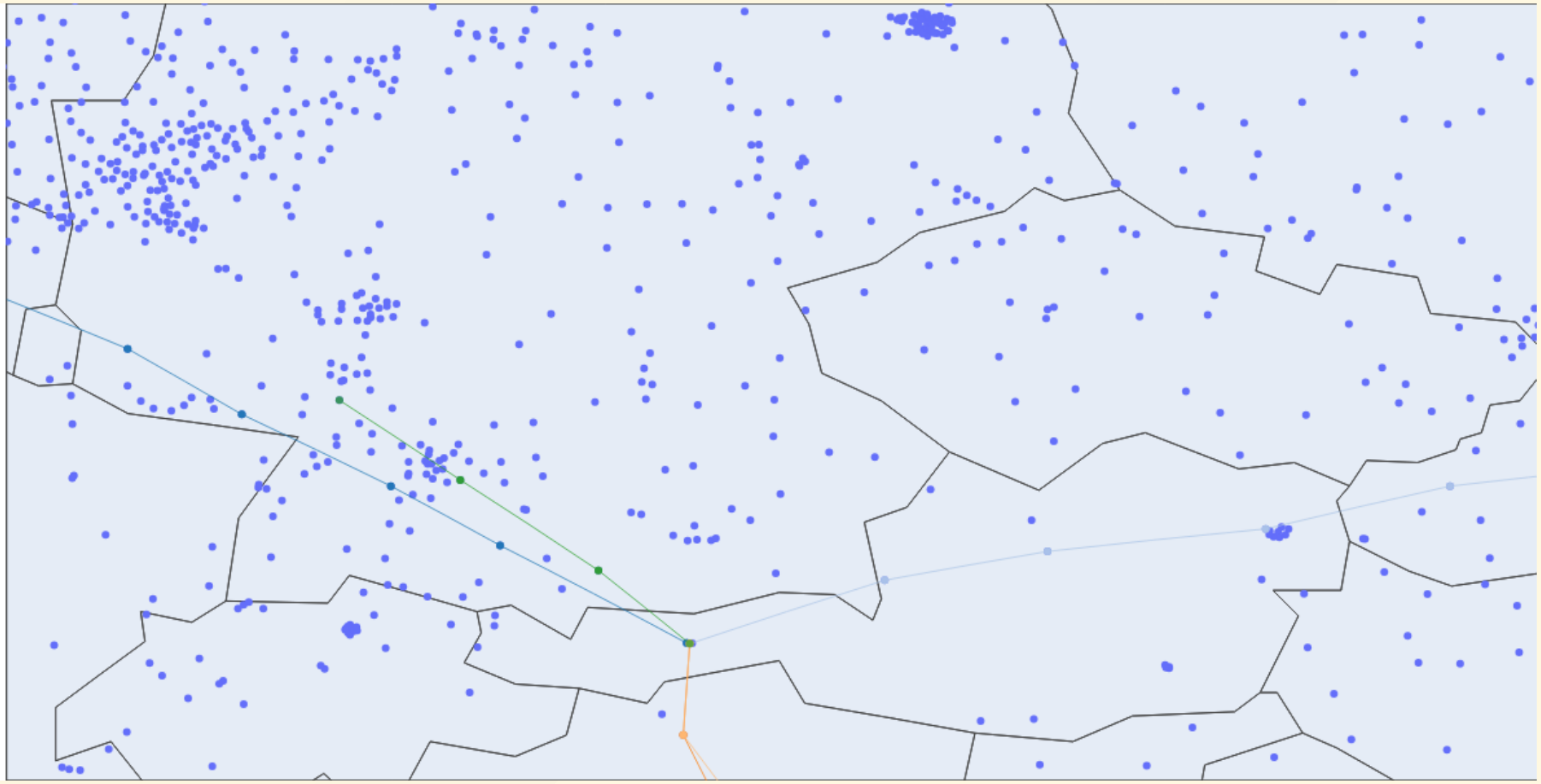
- Kann effizient mit einer Liste abgebildet werden, die auf anhand einer Baumstruktur sortiert wird
  - Wurzel: Index `0`
  - Knoten k: Index `k`
    - Linkes Kind von k: Index `2*k + 1`
    - Rechtes Kind von k: Index `2*k + 2`

## Beispiel mit `heapq`-Modul - `priority_queue_heap.py`

```python
from heapq import heapify, heappop, heappush

passenger_list = []
heappush(passenger_list, (3, "Daniel"))
heappush(passenger_list, (2, "Klaus"))
heappush(passenger_list, (1, "Markus"))
heappush(passenger_list, (2, "Thomas"))
heappush(passenger_list, (1, "Andreas"))

while passenger_list:
  print(heappop(passenger_list))

# (1, 'Andreas')
# (1, 'Markus')
# (2, 'Klaus')
# (2, 'Thomas')
# (3, 'Daniel')
```

# Graphen

# Beispiel - Traveling Salesman Problem



- Ein Verkäufer muss eine Reihe von Städten besuchen und wieder zum Ausgangspunkt zurückkehren
- Die Distanz zwischen den Städten ist bekannt
- Gesucht ist der kürzeste Weg um alle Städte zu besuchen

# Graphen

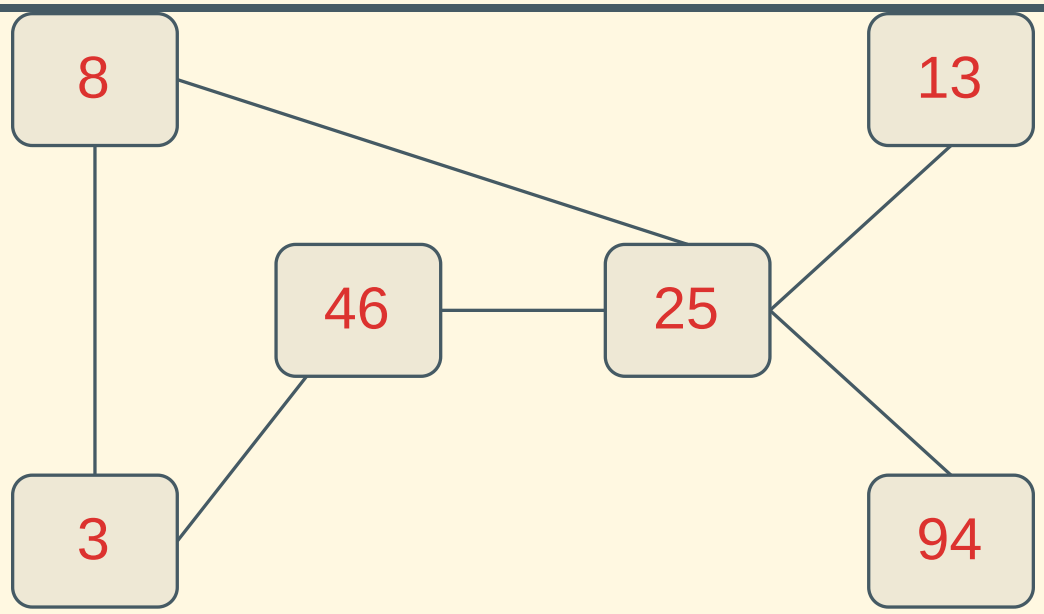
- Sind eine Verallgemeinerung des Konzeptes eines Baums
- Eigenen sich um viele Problemstellungen zu beschreiben
  - Straßennetze
  - Elektrische Schaltungen bestehend aus Mehrpolen
  - Netzwerk an Personen auf LinkedIn

## Aufbau eines Graphen

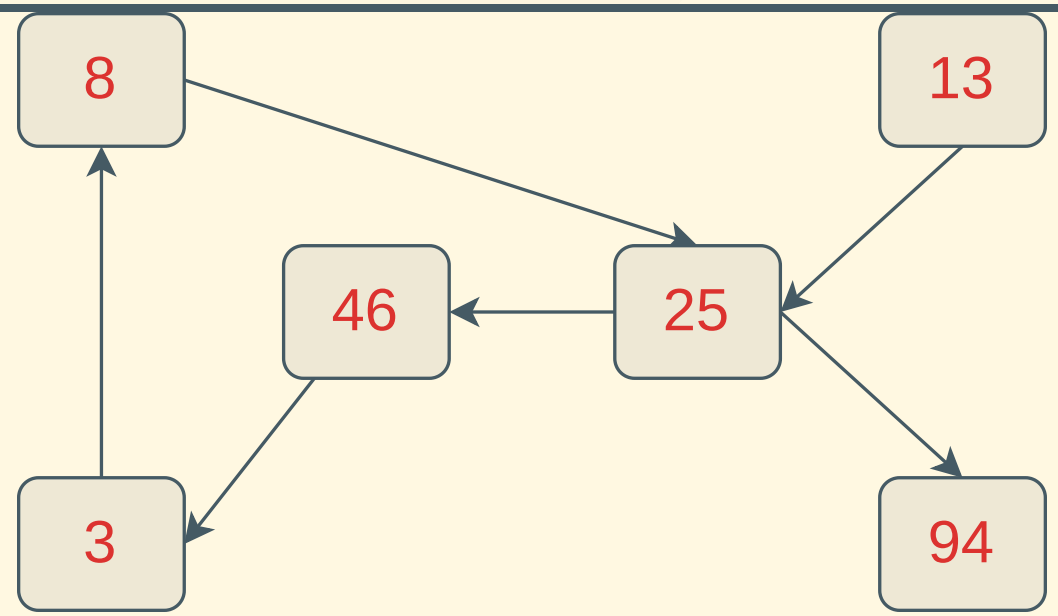
- Knoten die mit Kanten verbunden sind
- Ein Knoten kann mit beliebig vielen anderen Knoten verbunden sein → es gibt keine Hierarchie zwischen den Knoten mehr
- Eine Kante kann ungerichtet oder gerichtet (Durchlaufen nur in diese Richtung möglich) sein
- Eine Kante kann gewichtet sein → gibt die Kosten beim Durchlaufen an

# Graphen

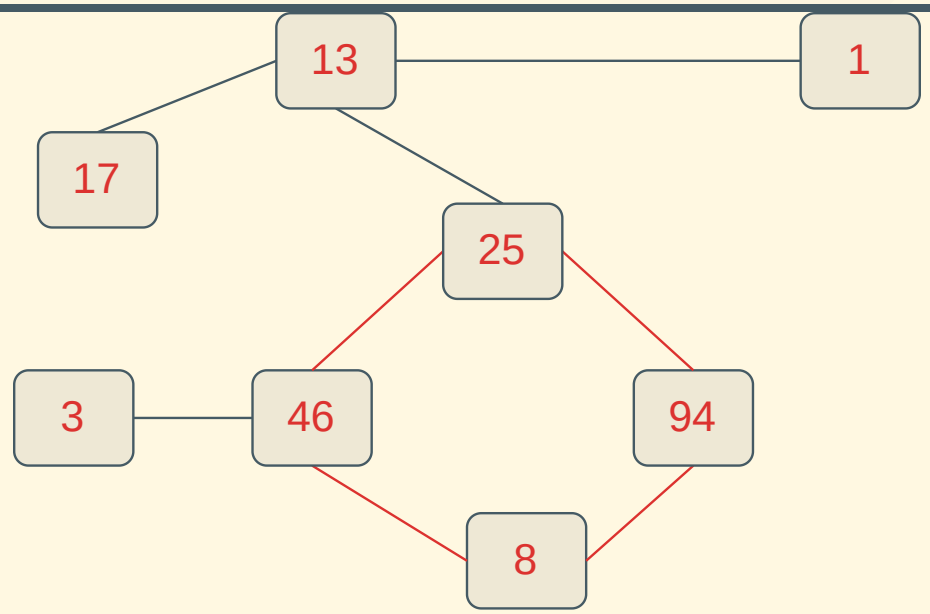
## Ungerichtet



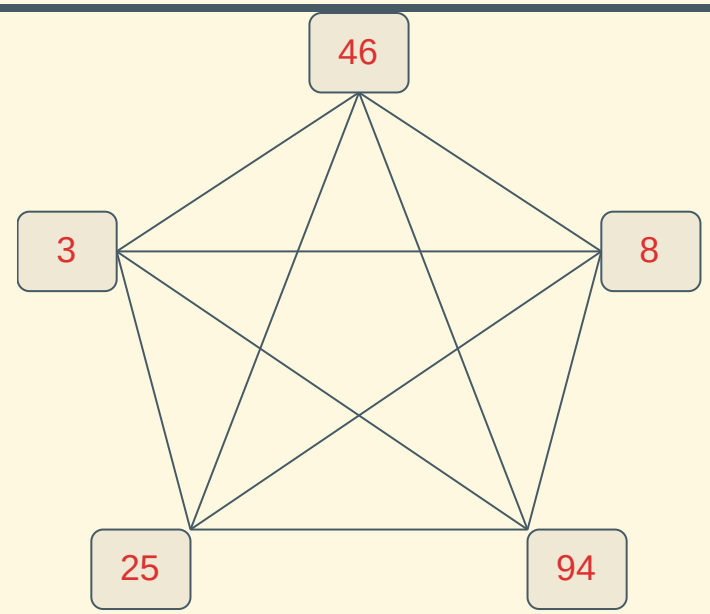

## Gerichtet




## mit Zyklus




## Vollständig



# Graphen

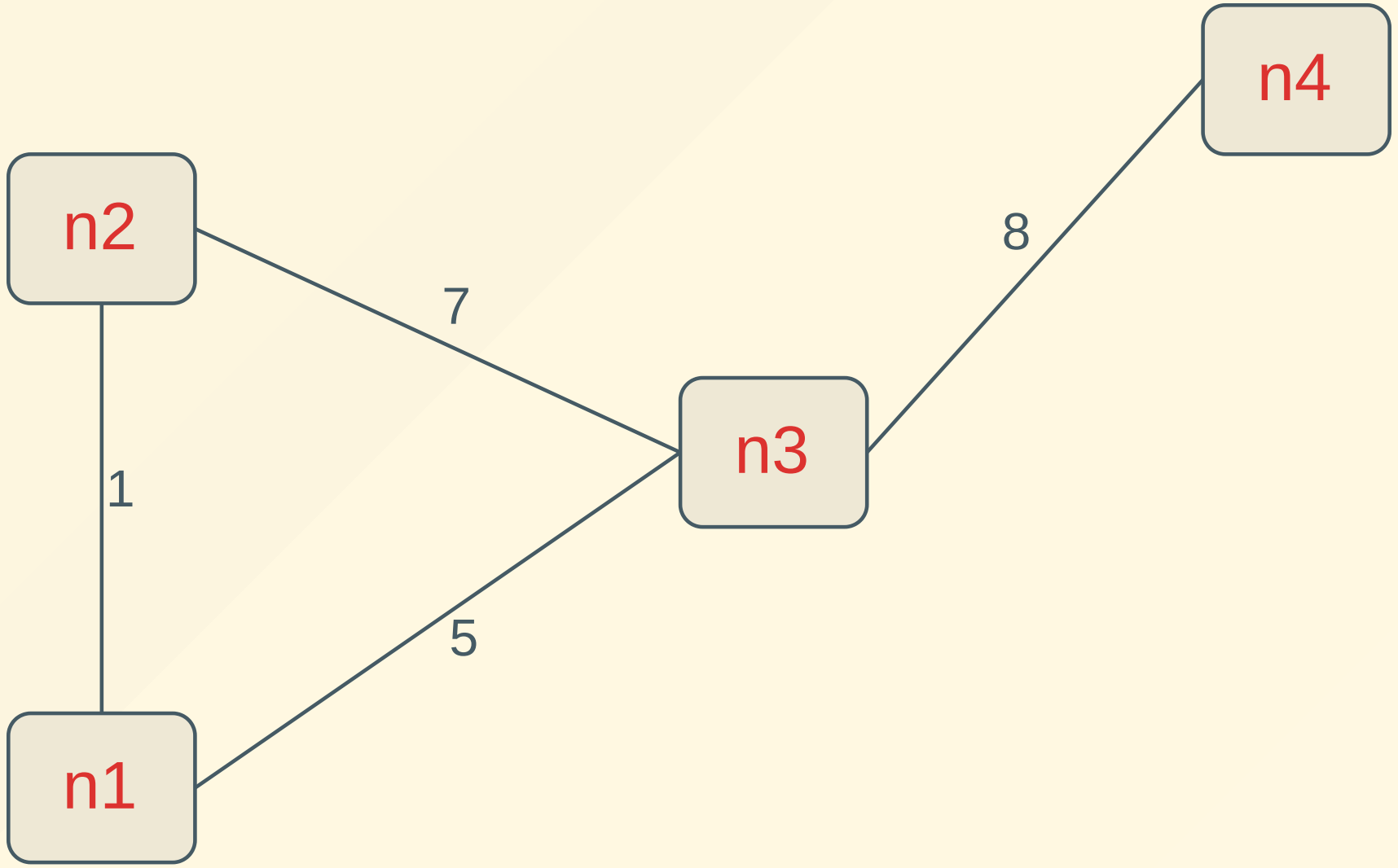
- Der ADT eines Graphen kann (wie immer) auf diverse Arten implementiert werden
- In Python bietet sich ein Dictionary an
  - Schlüssel: Knoten
  - Wert: Dictionary mit allen Knoten die mit dem Schlüssel verbunden sind
    - Schlüssel: Knoten
    - Wert: Gewicht der Kante

## Beispiel

```
# node: {node: weight, node: weight}
graph = {
   "n1": { "n2": 1, "n3": 5 },
   "n2": { "n1": 1, "n3": 7 },
   "n3": { "n1": 5, "n2": 7, "n4": 8 },
   "n4": { "n3": 8 }
}
```

# Pfadsuche in Graphen

- Wir wollen den kürzesten (gewichteten) Pfad zwischen zwei Knoten finden
- Wie bei Bäumen haben wir hier zwei Varianten
  - Breitensuche
  - Tiefensuche
- Pfad von n2 nach n4: n2 → n1 → n3 → n4 wenn Gewichte berücksichtigt werden



# Dijkstra's Algorithm

- Modifikation der Breitensuche → Greedy-Algorithmus
- Wir starten bei einem Knoten und fügen alle über eine Kante erreichbare Knoten zu einer Warteschlange hinzu

## Pseudocode

```
Algorithm Dijkstra(G, s):

Input: A graph G and a start node s of G
Output: List of shortest paths from s to all other nodes in G

D = map of distances from s to all other nodes in G
D[s] = 0
Q = empty queue
Q.enqueue(s)

while Q is not empty:
  u = Q.dequeue()

  for each node v adjacent to u:
    alt_rout = D[u] + v.weight
    if alt_rout < D[v]:
      D[v] = alt_rout
      Q.enqueue(v)
return D
```

# ✍️ Aufgabe

- Wir wollen nun diese einfache Variante des Dijkstra-Algorithmus implementieren
- Wir beschränken uns auf ungerichtete Graphen und die einfachste
- Dazu betrachten wir wieder folgenden Graphen:

```
graph = {
  "n1": { "n2": 1, "n3": 5 },
  "n2": { "n1": 1, "n3": 7 },
  "n3": { "n1": 5, "n2": 7, "n4": 8 },
  "n4": { "n3": 8 }
}
```

# Dijkstra's Algorithm

- Hier enthalten sind 3 mögliche Implementierungen des Algorithmus

## Musterlösung - `dijsktra_algorithm.py`

- Wir werden uns 3 mögliche Implementierungen ansehen
  - Mit einer simplen Warteschlange
  - 🤓 Mit einer Vorrangwarteschlange die auf einem Heap basiert
  - 🤓 Mit einer Vorrangwarteschlange und einer Liste um den Pfade zu rekonstruieren
- Die letzte ist jene die tatsächlich in der Praxis verwendet wird

# Implementierung mit `networkx`-Modul

- Wir werden selten Graphen und dazugehörige Algorithmen vollständig selbst definieren
- Bibliotheken wie `networkx` bieten eine Vielzahl an Funktionen → u.a. eine effiziente Implementierung von Dijkstra's Algorithmus

## Beispiel - `networkx_example.py`

```python
import networkx as nx

graph = nx.Graph()
for i in range(1, 4+1):
    graph.add_node(F"n{i}")

graph.add_edge("n1", "n2", weight=1)
graph.add_edge("n1", "n3", weight=5)
graph.add_edge("n2", "n3", weight=7)
graph.add_edge("n3", "n4", weight=8)

path_with_weight = nx.shortest_path(graph, "n2", "n4", weight="weight")
print(path_with_weight)

# ['n2', 'n1', 'n3', 'n4']
```

# 🏆 Hausübung

- Wir wollen für eine fiktive Logistikfirma bestimmen welche Reichweite eine Flotte an Elektro- oder Wasserstofffahrzeugen haben muss um Lieferungen in ganz Europa durchführen zu können
- Hierzu haben wir einen `DataFrame` mit Städten und deren Koordinaten
- Wir wollen nun einen Graphen erstellen der die Verbindungen zwischen den Städten darstellt und die Reichweite der Fahrzeuge berücksichtigt